

C-1. 計画研究C01班の報告

岡本 吉央

(計画研究C01班代表, 電気通信大学)

学術変革領域研究 (B) 2020年度～2022年度
組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合

計画研究 C01班

数学アプローチによる組合せ遷移の展開： 活用事例を手がかりとして新解法へ



Combinatorial Reconfiguration

研究代表者	岡本 吉央	(電通大)
研究分担者	神山 直之	(九州大)
研究分担者	垣村 尚徳	(慶應大)
研究分担者	小関 健太	(横国大)
研究分担者	小林 佑輔	(京都大)
研究分担者	野崎 雄太	(広島大)
研究分担者	岩政 勇仁	(京都大)
研究分担者	前澤 俊一	(理科大)

C01班の大目標

「**組合せ遷移に対する数学理論**」の構築

C01班の2年半における目標

組合せ遷移における**数学活用事例の体系的収集**

組合せ遷移に資する**数学手法**の開発



アルゴリズム設計 (A01班)



ソフトウェア開発 (B01班)

C01班の大目標

「**組合せ遷移に対する数学理論**」の構築

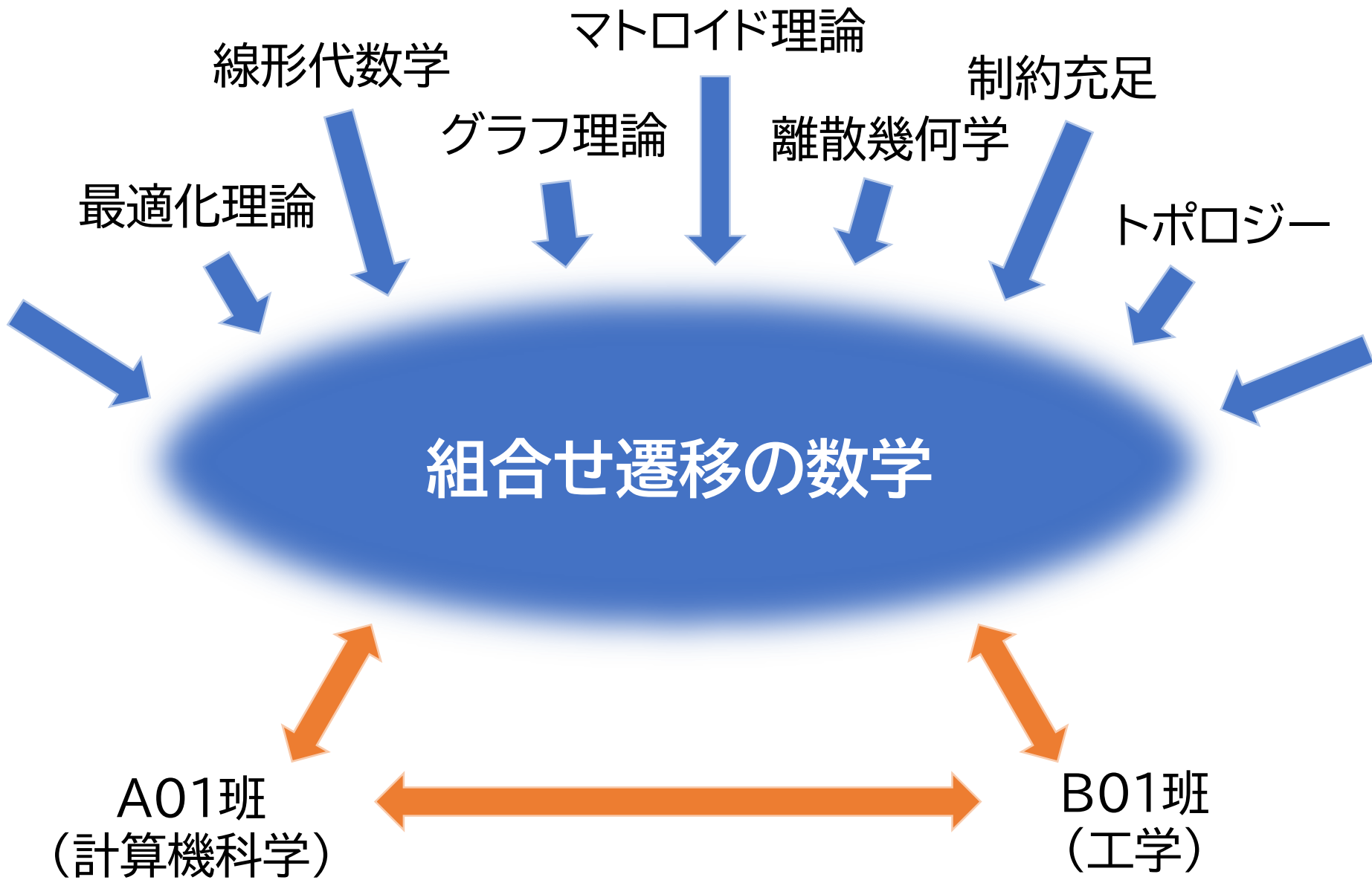
C01班の2年半における目標

組合せ遷移における**数学活用事例の体系的収集**

組合せ遷移に**資する数学手法**の開発

うまくいく例をうまく集める

うまくいく例から法則を見出す



2年半のC01班の主な活動 (1)

Zoomによるミーティング

Slackにおけるディスカッション (随時)

⇒ 問題の発掘・共有 (overleaf)

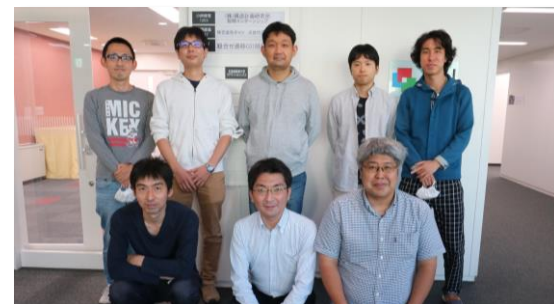
⇒ 問題の解決

⇒ 論文の執筆・投稿

数学諸分野の研究者の
チームであることが
有機的に働いている

対面によるミーティング

(仙台, 東京, 札幌, 富山)



小グループでのディスカッション

2年半のC01班の主な活動（2）

論文の出版

ジャーナル論文	34
査読付き国際会議論文	14
プレプリント	10

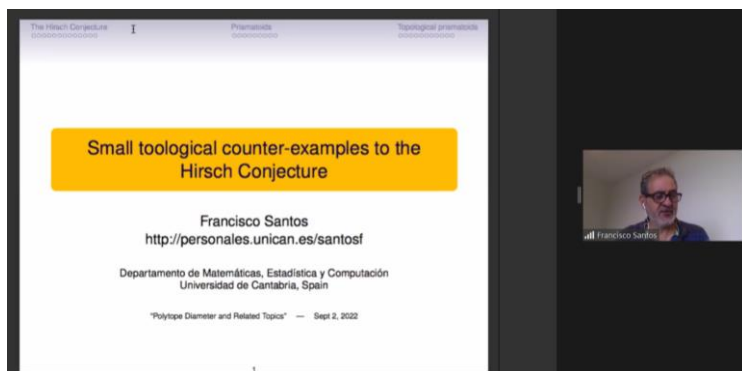
特に顕著なもの

AAAI	2022	CORE Rank A*
SODA	2022	CORE Rank A*
ISAAC	2022	CORE Rank A
SoCG	2022, 2023	CORE Rank A
STACS	2022	CORE Rank A

2年半のC01班の主な活動 (3)

国際ワークショップの開催

Combinatorial Reconfiguration in Discrete and Computational Geometry	2021/8/30
Graph Theory for Combinatorial Reconfiguration	2021/11/29
Polytope Diameter and Related Topics	2022/9/2
Combinatorial Reconfiguration and Fixed-Parameter Tractability	2022/12/12



A01班と共同

C01班の2年半における目標

組合せ遷移における**数学活用事例の体系的収集**

組合せ遷移に資する**数学手法**の開発

成果

新手法の開発/既存手法の進展 が行えた

- 劣モジュラ性・離散構造 (小林)
- 不変量 (岩政)
- トポロジー (野崎)

C01班の2年半における目標

組合せ遷移における**数学活用事例の体系的収集**

組合せ遷移に資する**数学手法の開発**



成果

組合せ遷移概念の体系的応用・展開

- ゲーム理論/公平割当の理論 (神山)

C01班の大目標

「**組合せ遷移に対する数学理論**」の構築

C01班の2年半における目標

組合せ遷移における**数学活用事例の体系的収集**

組合せ遷移に資する数学手法の開発

大目標までは まだ志半ば

→ 今後「芽」を育てて、実らせたい



学術変革領域研究 (B) 2020年度～2022年度
組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合

計画研究 C01班

数学アプローチによる組合せ遷移の展開： 活用事例を手がかりとして新解法へ



Combinatorial Reconfiguration

研究代表者	岡本 吉央	(電通大)
研究分担者	神山 直之	(九州大)
研究分担者	垣村 尚徳	(慶應大)
研究分担者	小関 健太	(横国大)
研究分担者	小林 佑輔	(京都大)
研究分担者	野崎 雄太	(広島大)
研究分担者	岩政 勇仁	(京都大)
研究分担者	前澤 俊一	(理科大)

C-2. 数学基盤：組合せ遷移の研究に資する数理手法

C-2.1. 組合せ遷移と離散構造

小林 佑輔

(京都大学)

組合せ遷移と離散構造

小林 佑輔

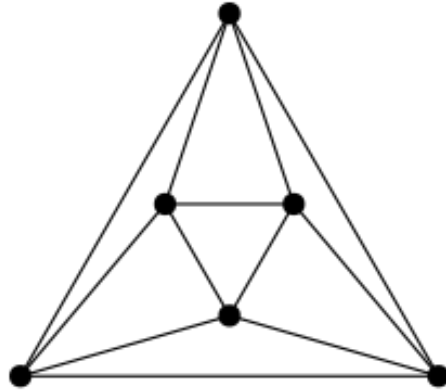
京都大学 数理解析研究所

T. Ito, Y. Iwamasa, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, S. Maezawa, Y. Nozaki, Y. Okamoto, K. Ozeki:
Monotone edge flips to an orientation of maximum edge-connectivity à la Nash-Williams,
(最大辺連結向き付けへの単調辺フリップ Nash-Williams 風)

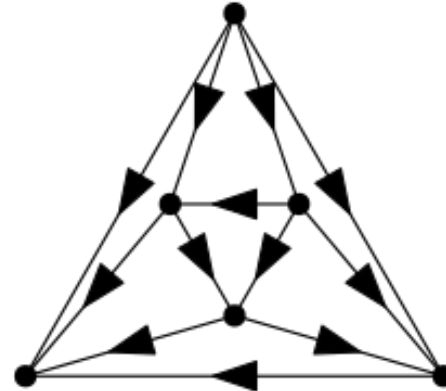
国際会議版 : SODA 2022

ジャーナル : ACM Transactions on Algorithms

グラフの向き付け



無向グラフ

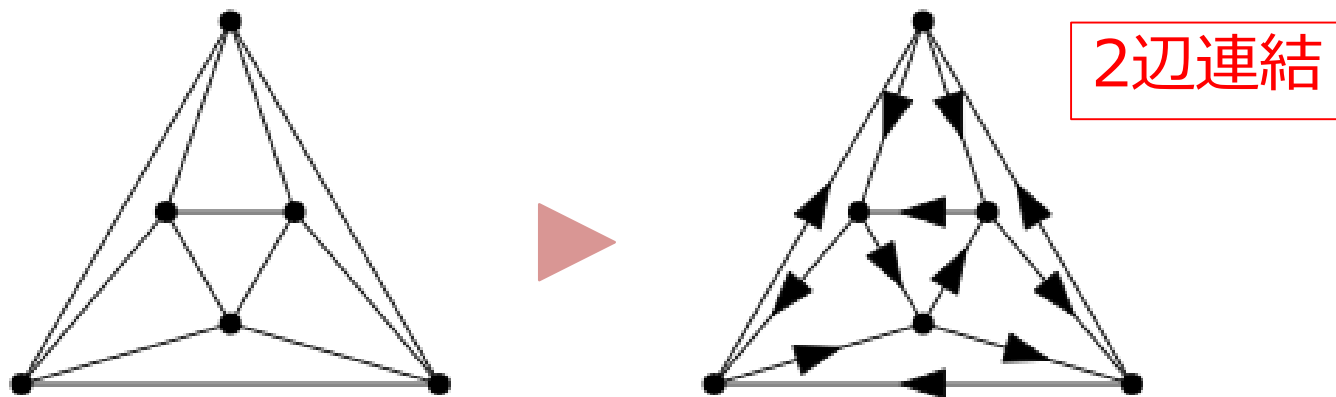


有向グラフ

何らかの性質をみたすように向き付けしたい

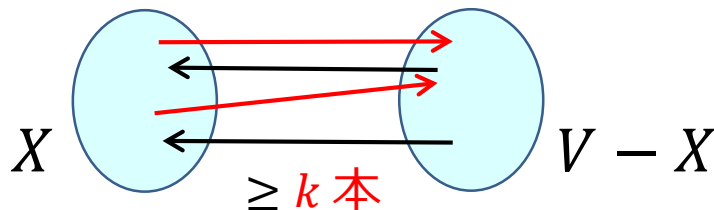
- 連結度制約
- 次数制約
- 非巡回的 etc.

k 辺連結向き付け

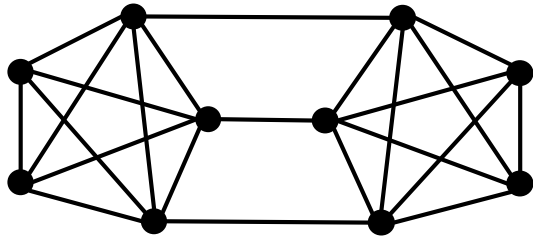


有向グラフが k 辺連結になるように向き付けしたい

k 辺連結 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の頂点部分集合 $X \neq \emptyset, V$ に対して X から出る辺の数 $\geq k$

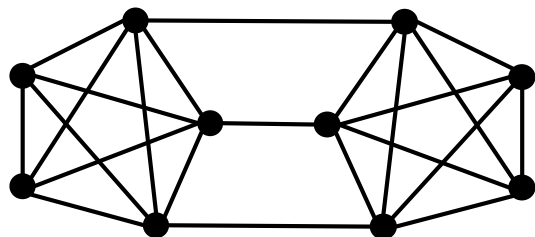


k 辺連結向き付けの存在条件



2辺連結向き付けが存在しない例

k 辺連結向き付けの存在条件

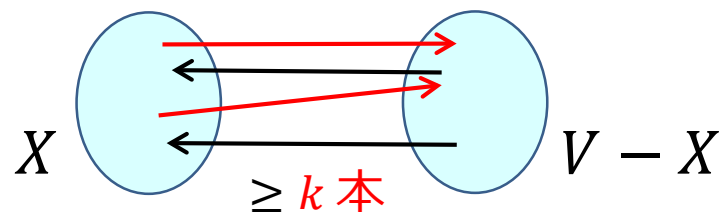
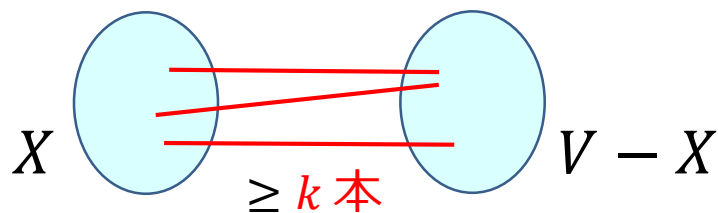


2辺連結向き付けが存在しない例

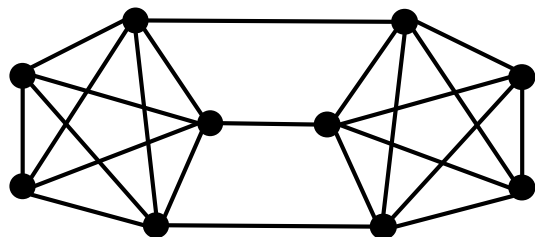
観察

k 辺連結向き付けが存在 \Rightarrow グラフが $2k$ 辺連結

k 辺連結 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の頂点部分集合 $X \neq \emptyset, V$ に対して
 X から出る辺の数 $\geq k$



k 辺連結向き付けの存在条件

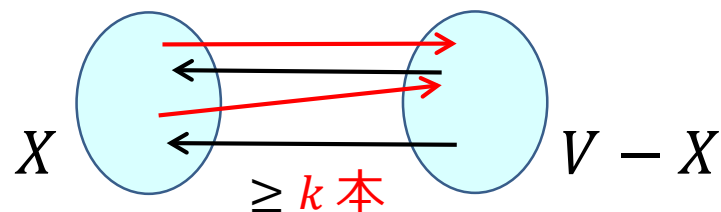
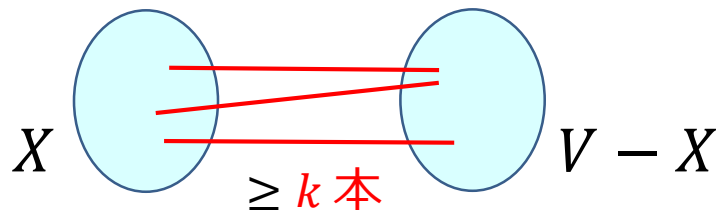


2辺連結向き付けが存在しない例

定理 (Nash-Williams '60)

k 辺連結向き付けが存在 \iff グラフが $2k$ 辺連結

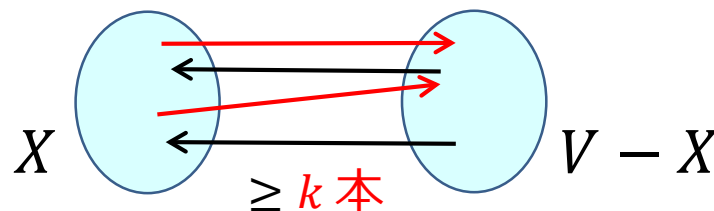
k 辺連結 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の頂点部分集合 $X \neq \emptyset, V$ に対して
 X から出る辺の数 $\geq k$



研究対象：辺フリップによる遷移

辺連結度を下げずに辺の向きを1本ずつ変更していく

k 辺連結 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の頂点部分集合 $X \neq \emptyset, V$ に対して
 X から出る辺の数 $\geq k$



辺連結度 $\stackrel{\text{def}}{=} \max\{k \mid k\text{辺連結である}\}$

得られた結果 (1)

辺連結度を下げずに辺の向きを1本ずつ変更していき
辺連結度最大の向き付けに遷移できる

きちんと書くと...

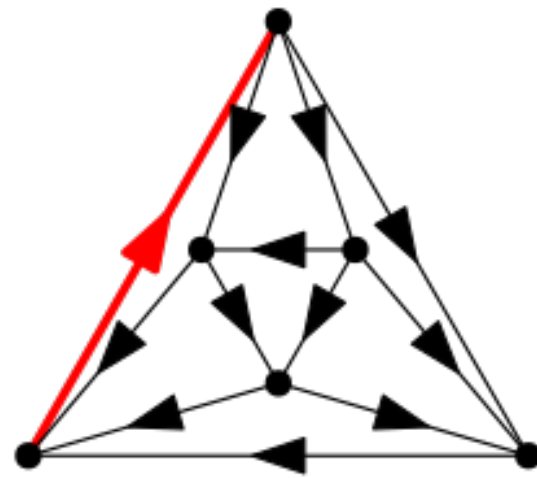
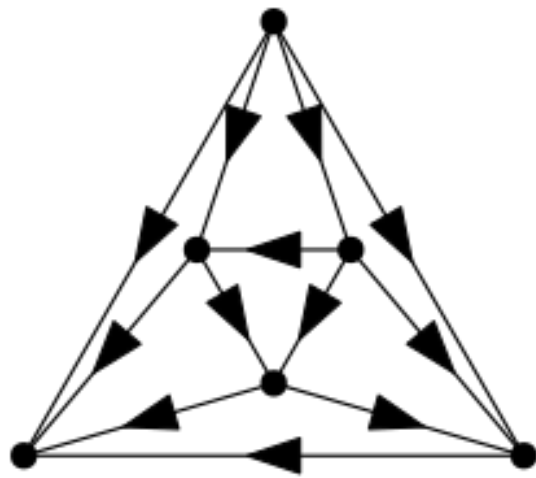
G : 任意の $2k$ 辺連結無向グラフ

D_1 : G の任意の向き付け

$\Rightarrow \exists G$ の向き付けの列: D_1, D_2, \dots, D_t

- D_{i-1} から D_i が辺のフリップで得られる
- 辺連結度が単調非減少
- D_t の辺連結度 $= k$
- $t \leq kn^3$ ($n = G$ の頂点数)

辺連結度を下げないように，1辺をフリップ

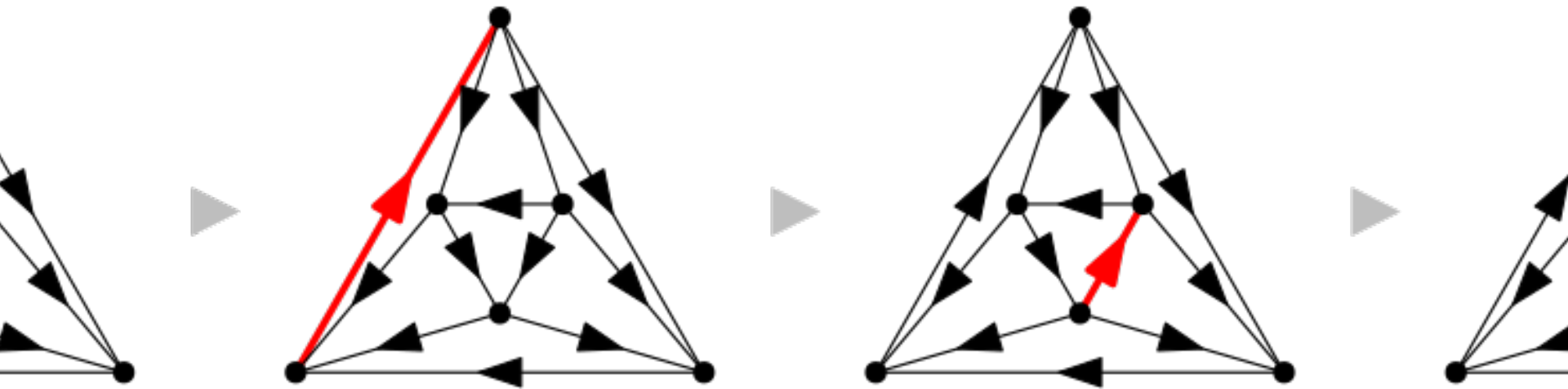


辺連結度

0

1

辺連結度を下げないように，1辺をフリップ

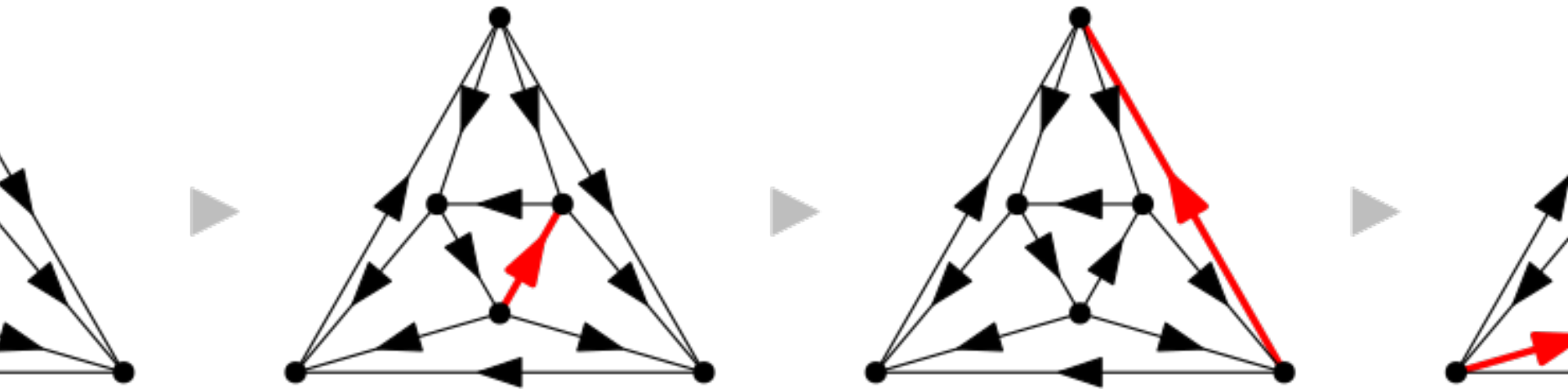


辺連結度

1

1

辺連結度を下げないように，1辺をフリップ



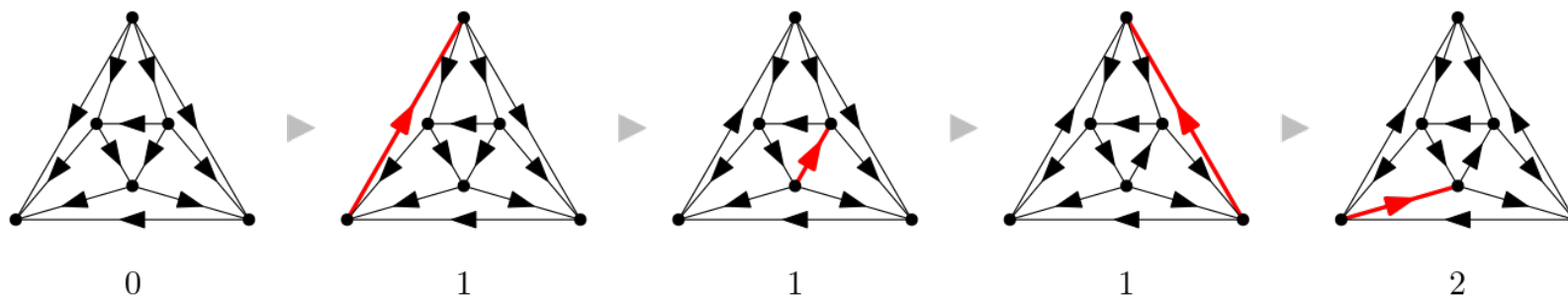
辺連結度

1

1

得られた結果 (1)

辺連結度を下げずに辺の向きを1本ずつ変更していき
辺連結度最大の向き付けに遷移できる



Nash-Williamsの定理の 組合せ遷移による新証明



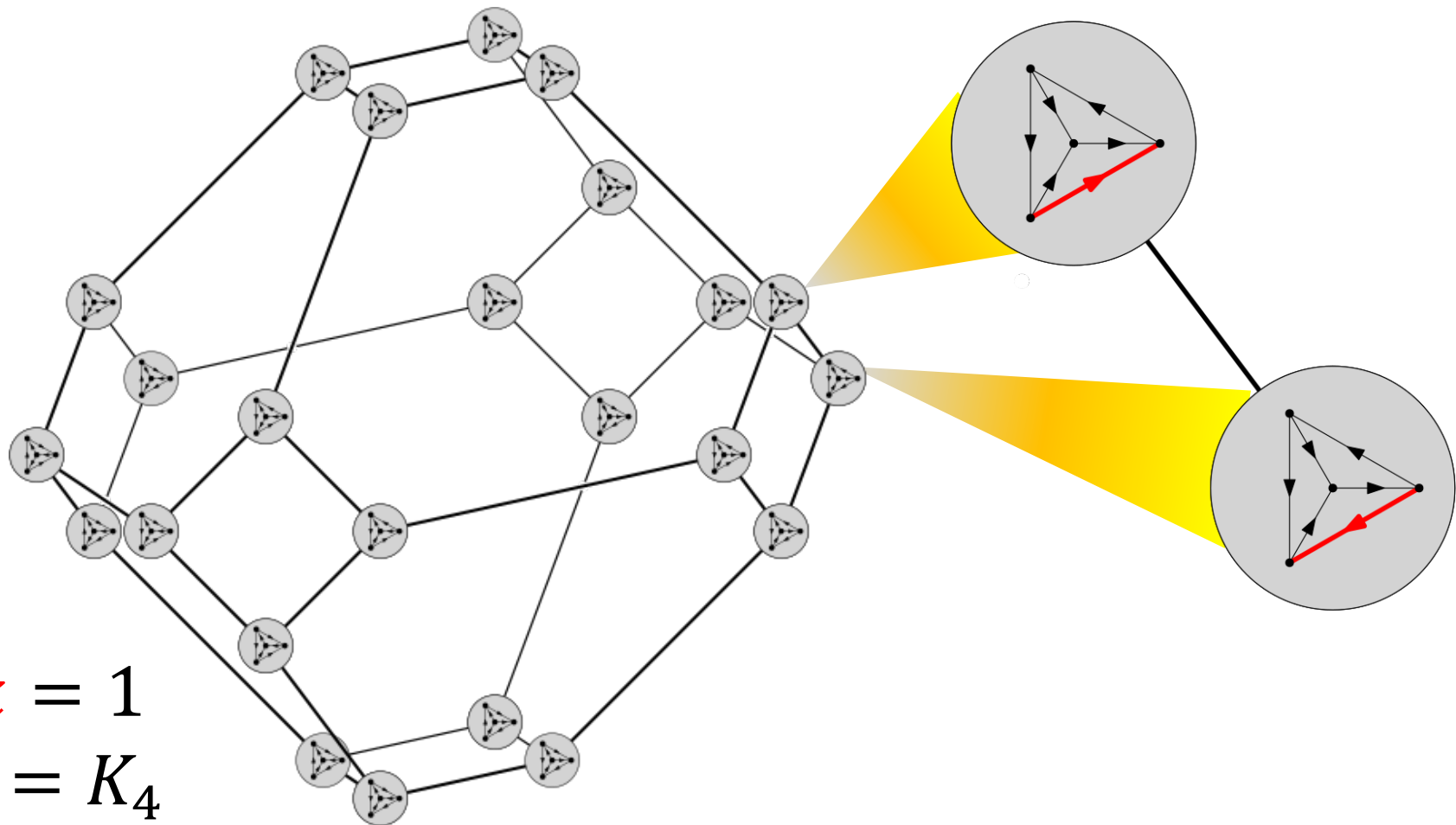
「向き付けの空間」に
対する新たな知見

従来の証明

- 奇頂点のペアリングとオイラー回路
- 辺遊離定理の利用
- 劣モジュラ流の利用

得られた結果 (2)

任意の $(2k + 2)$ 辺連結グラフにおいて
 k 辺連結向き付けの フリップ・グラフは連結



離散構造・劣モジュラ性

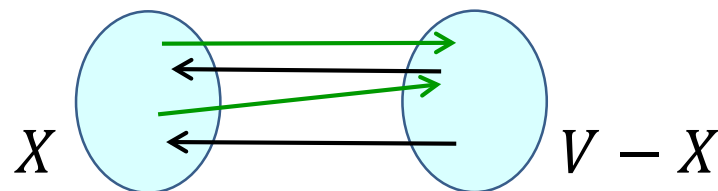
- **最適** k 辺連結向き付けの鍵

- カット関数の劣モジュラ性

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

- **タイト集合**の構造

↳ 出る辺の数 = k となる集合



- k 辺連結向き付け**遷移**の鍵 (上記に加えて)

- **ほぼタイト**な集合の構造

↳ 出る辺の数 = $k + 1$ となる集合

まとめ

Nash-Williamsの定理 の **組合せ遷移** による 新証明

結果 (1)

辺連結度を下げずに辺をフリップしていき
辺連結度最大の向き付けに遷移できる

結果 (2)

任意の $(2k + 2)$ 辺連結グラフにおいて
 k 辺連結向き付け の フリップ・グラフ は連結

離散構造の役割

- 従来の最適化で用いられていた技法は重要
- 新たな構造に注目する必要があることも

C-2. 数学基盤：組合せ遷移の研究に資する数理手法

C-2.2. 組合せ遷移と不変量

岩政 勇仁

(京都大学)

組合せ遷移と不変量

岩政 勇仁

京都大学大学院 情報学研究科

Takehiro Ito, Yuni Iwamasa, Yusuke Kobayashi, Shun-ichi Maezawa,
Yuta Nozaki, Yoshio Okamoto, and Kenta Ozeki

Reconfiguration of colorings in triangulations of the sphere

39th International Symposium on Computational Geometry (**SoCG 2023**),
to appear

学術変革領域研究(B) 「組合せ遷移」 最終報告会 @東北大学

2023年2月21日

本研究の成果 (の一部)

球面の3彩色可能三角形分割 G の 4彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_4(G)$ の
連結性を (ある程度) とらえる**不変量**の提案

本研究の成果 (の一部)

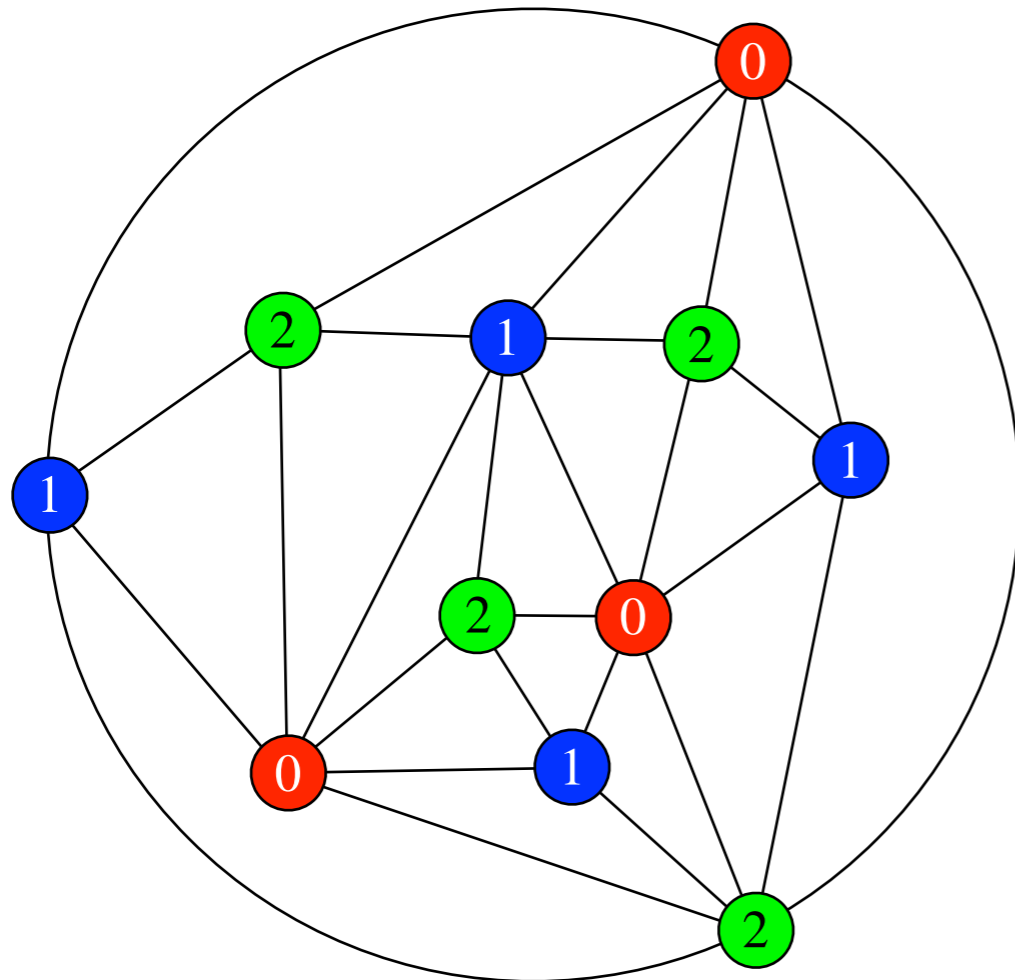
球面の3彩色可能三角形分割 G の 4彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_4(G)$ の

連結性を (ある程度) とらえる不変量の提案

平面グラフ s.t. 全ての面が三角形

&

3彩色可能 (\Leftrightarrow 全ての頂点の次数が偶数)



本研究の成果 (の一部)

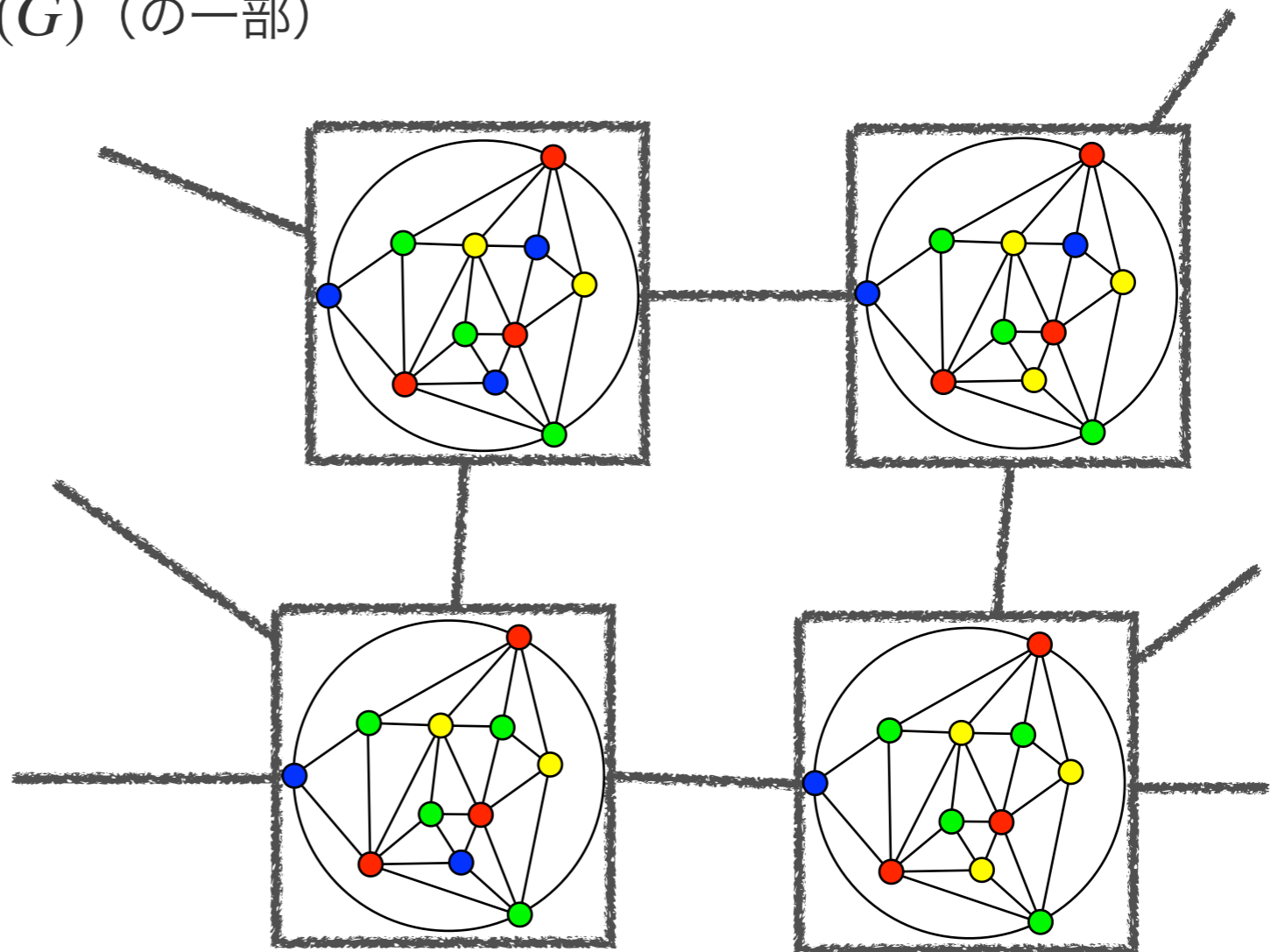
球面の3彩色可能三角形分割 G の 4彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_4(G)$ の

連結性を (ある程度) とらえる **不変量の提案**

頂点集合 := $\{G \text{ の4彩色 } \alpha : V(G) \rightarrow \{0,1,2,3\}\}$

枝集合 := $\{\{\alpha, \beta\} \mid \alpha \text{ と } \beta \text{ は一つの頂点の色のみに異なる}\}$

$\mathcal{R}_4(G)$ (の一部)



本研究の成果 (の一部)

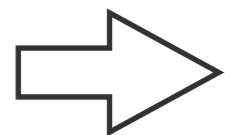
球面の3彩色可能三角形分割 G の 4彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_4(G)$ の
連結性を (ある程度) とらえる**不変量**の提案

モチベーション：

定理 [Fisk (1973)]

球面の3彩色可能三角形分割 の 任意の4彩色 は
Kempe 変換を繰り返すことで互いに移りあえる

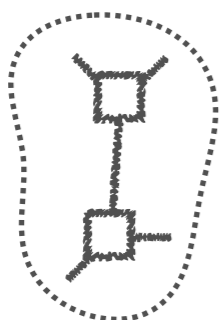
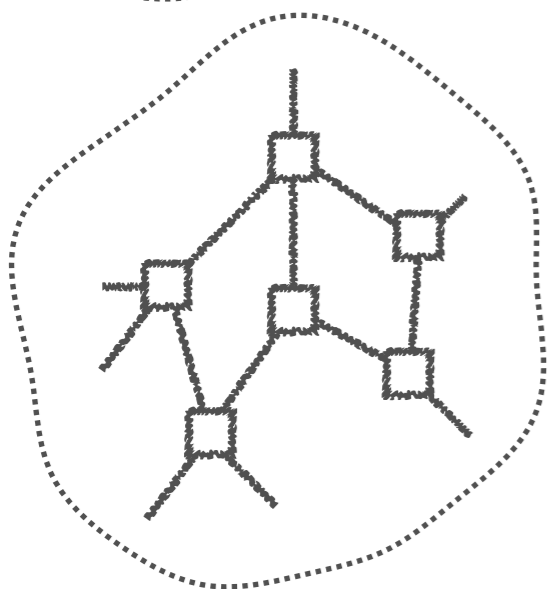
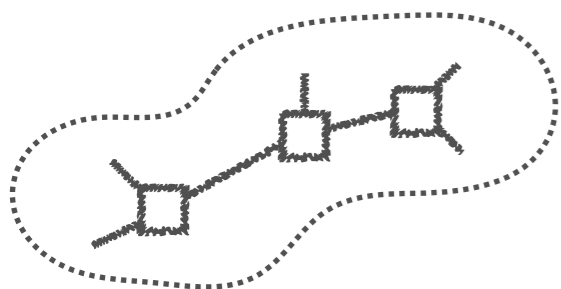
- (ある条件を満たす) 複数の頂点の色を同時に変更可能
- 一つの頂点の色の変更 \subseteq Kempe 変換



Q. Kempe 変換の特殊ケースである
一つの頂点の色変更
のみを色変更操作として許した場合どうなる？

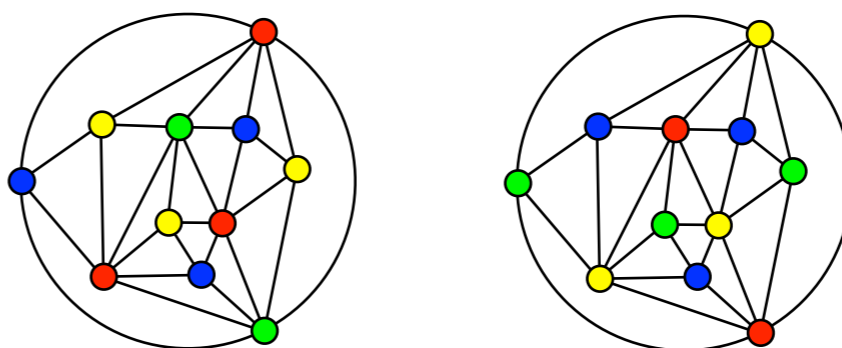
事実

$\mathcal{R}_4(G)$



事実①

$\mathcal{R}_4(G)$ が連結でないことがある, i.e.,
「一つの頂点の色変更」の繰り返しでは
移りあえない4彩色が存在

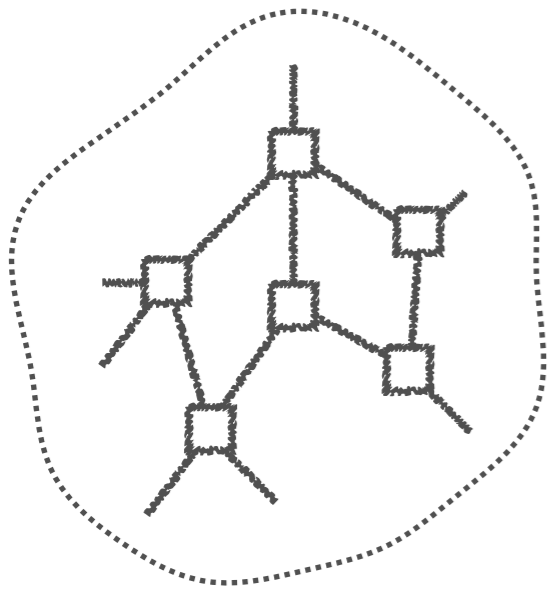
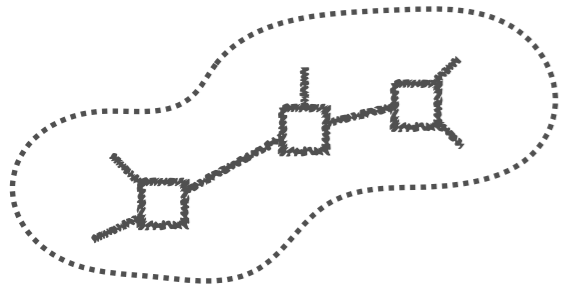


Cf. **定理** [Fisk (1973)]

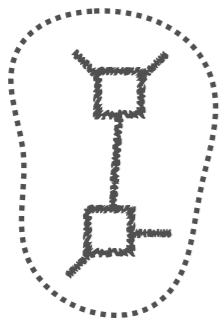
G の任意の4彩色は
Kempe 変換を繰り返すことで
互いに移りあえる

事実

$\mathcal{R}_4(G)$



3彩色連結成分

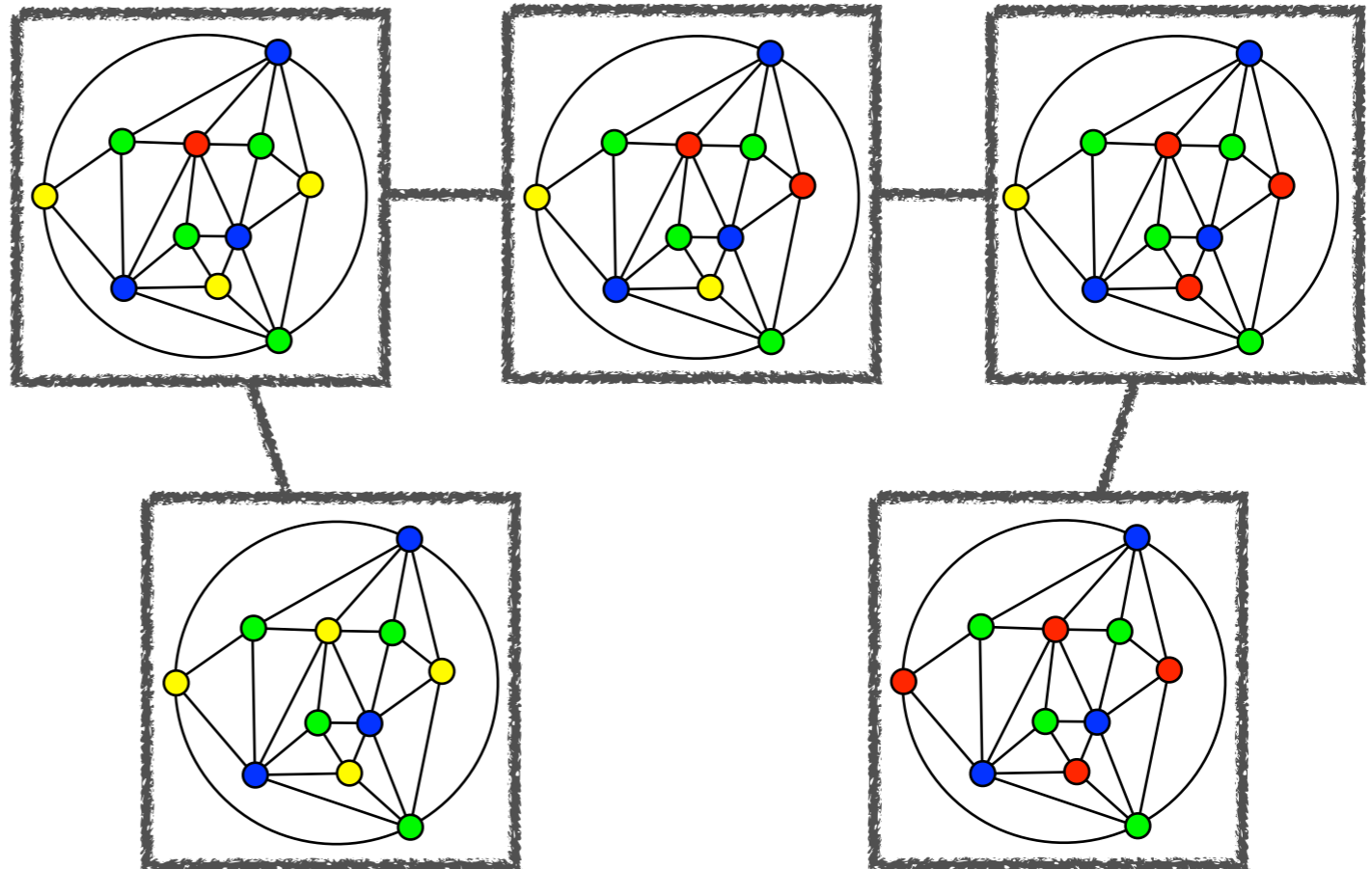


事実②

全ての3彩色は
 $\mathcal{R}_4(G)$ において同じ連結成分に属する

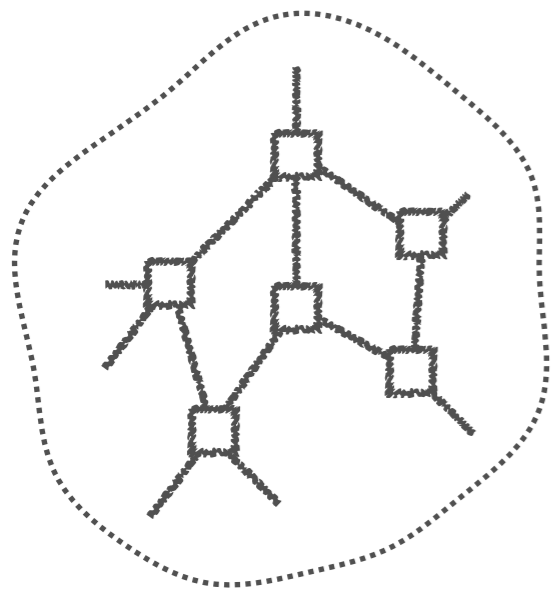
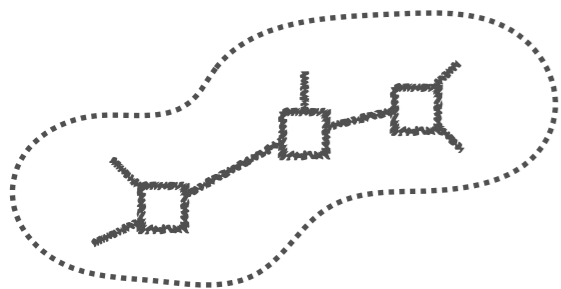
!!

3彩色連結成分

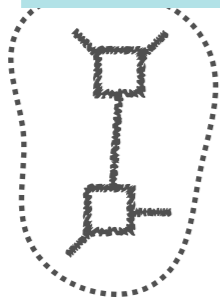


事実

$\mathcal{R}_4(G)$



3彩色連結成分

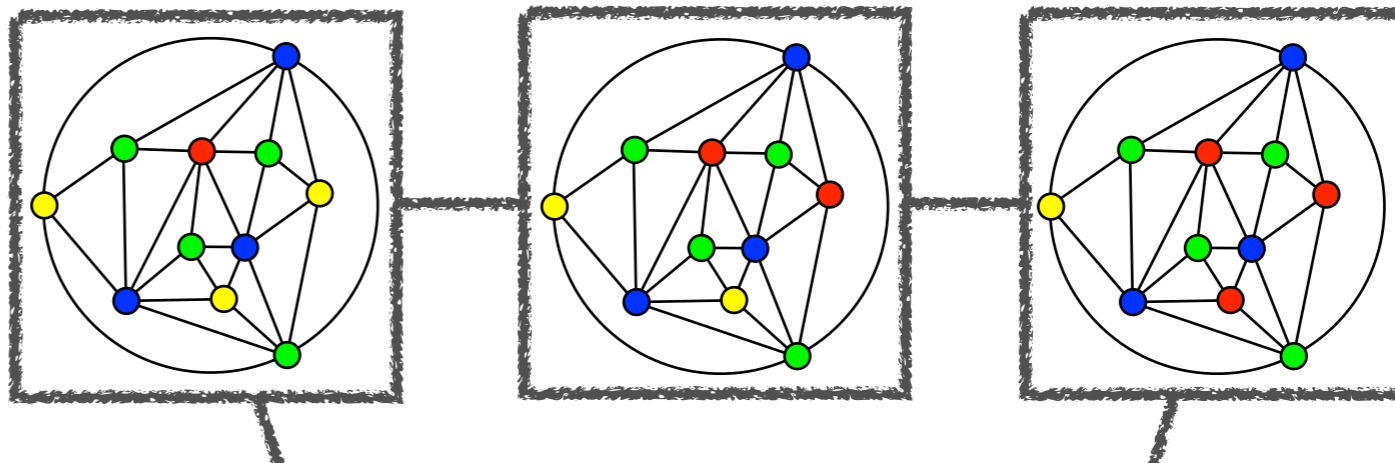


事実②

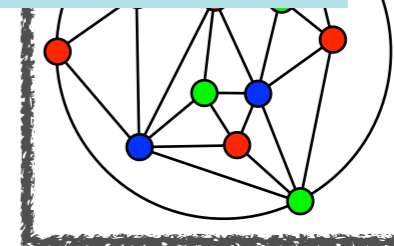
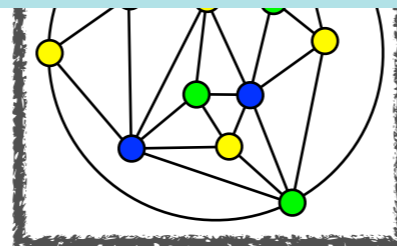
全ての3彩色は
 $\mathcal{R}_4(G)$ において同じ連結成分に属する

!!

3彩色連結成分



Q. どんな4彩色が 3彩色連結成分に含まれている?



準備

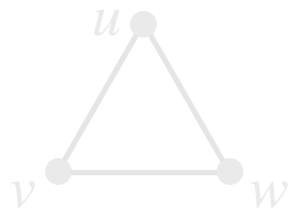
球面の3彩色可能三角形分割

$\alpha : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\} : G$ の4彩色

G の面の集合

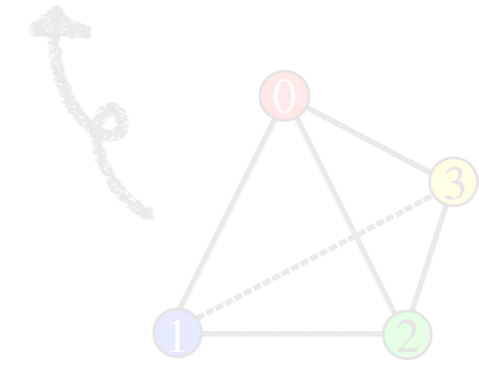
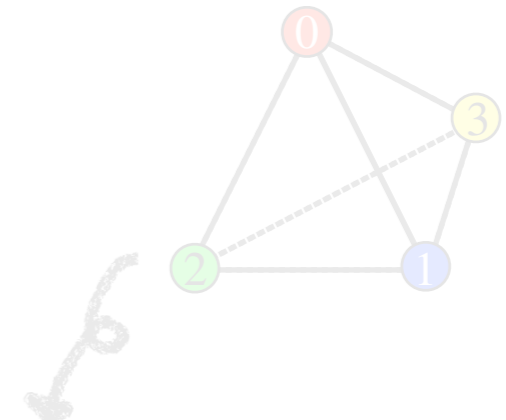
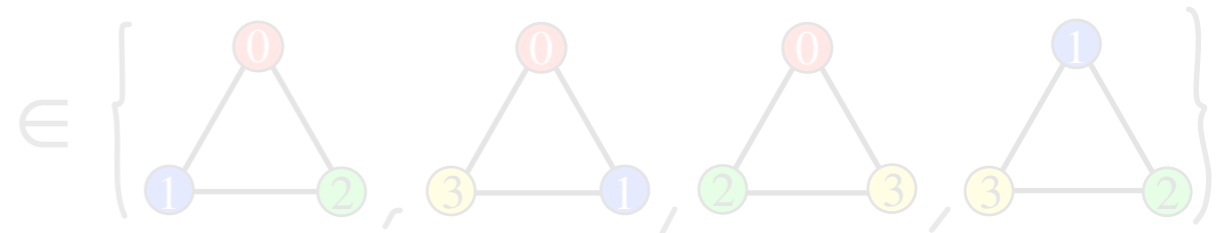
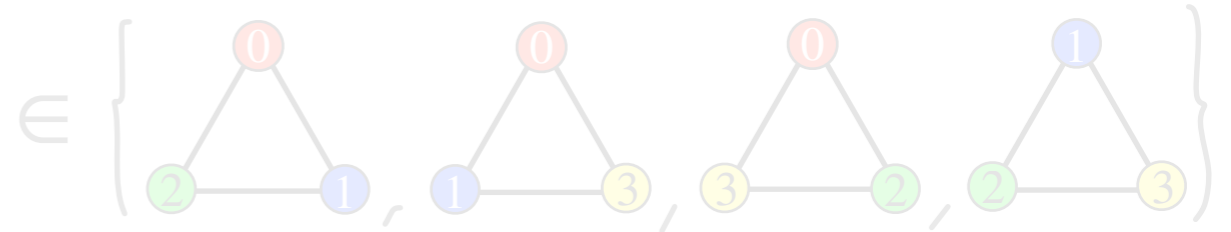
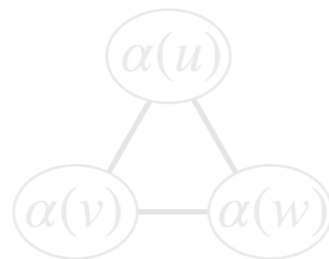
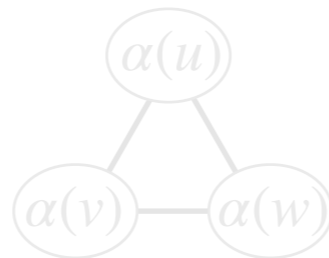
$\varepsilon_\alpha : F(G) \rightarrow \{+, -\}$

Ψ



Ψ

$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ if} \\ - \text{ if} \end{array} \right.$



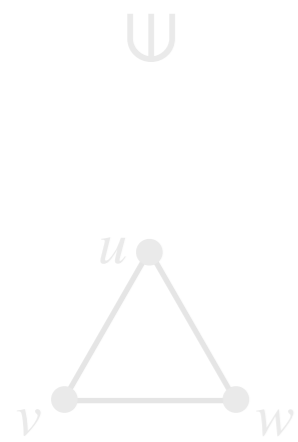
準備

球面の3彩色可能三角形分割

$\alpha : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\} : G$ の4彩色

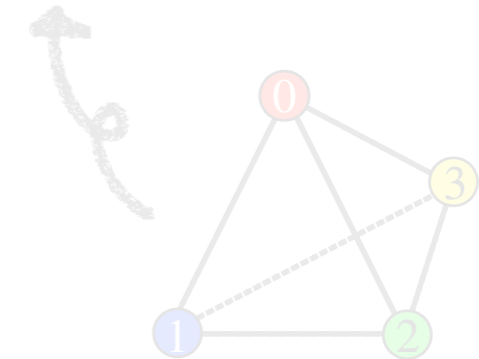
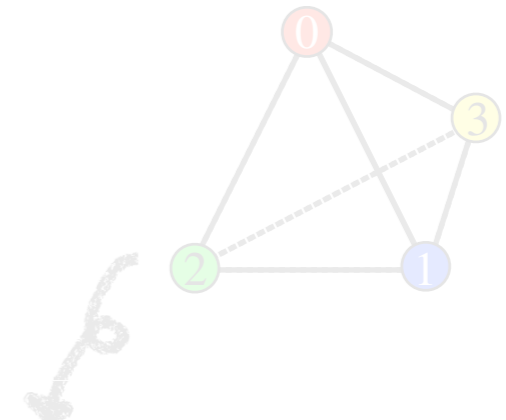
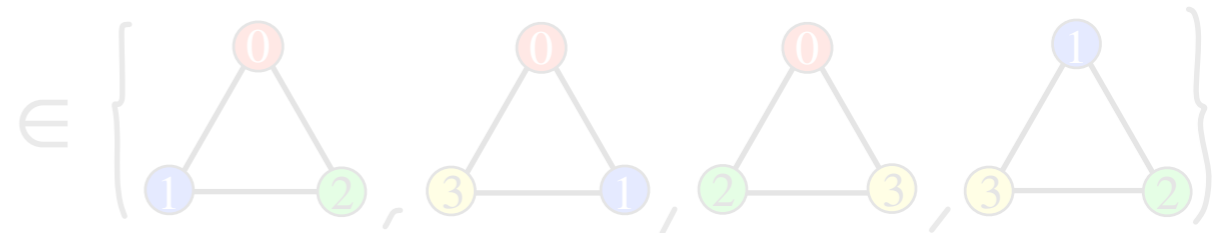
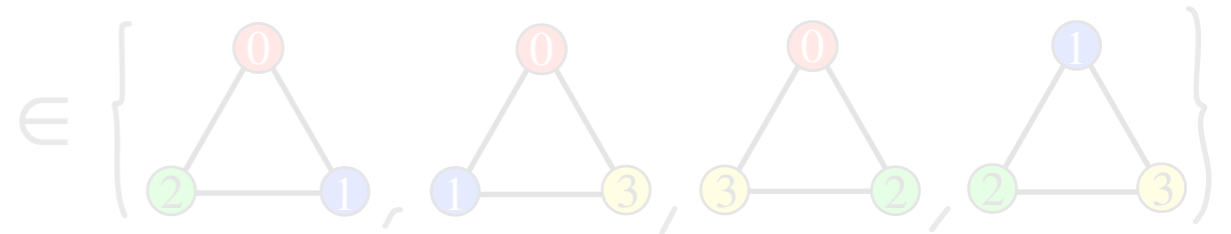
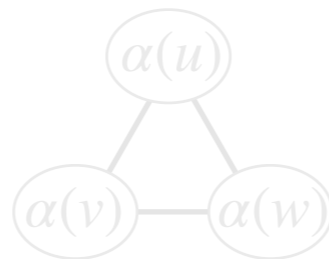
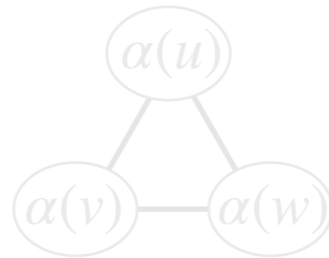
G の面の集合

$\varepsilon_\alpha : F(G) \rightarrow \{+, -\}$



Ψ

$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ if} \\ - \text{ if} \end{array} \right.$



準備

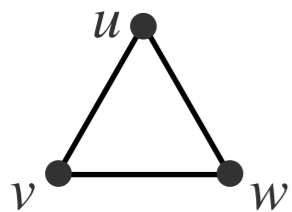
球面の3彩色可能三角形分割

$\alpha : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\} : G$ の4彩色

G の面の集合

$\varepsilon_\alpha : F(G) \rightarrow \{+, -\}$

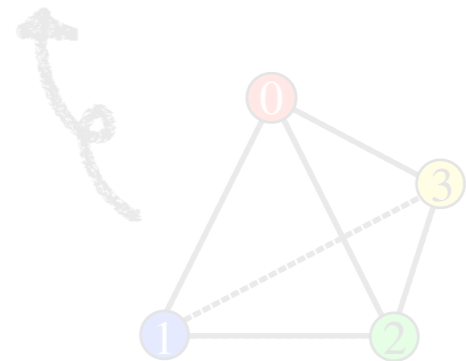
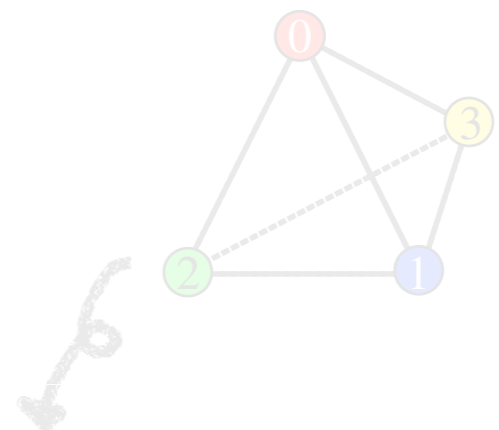
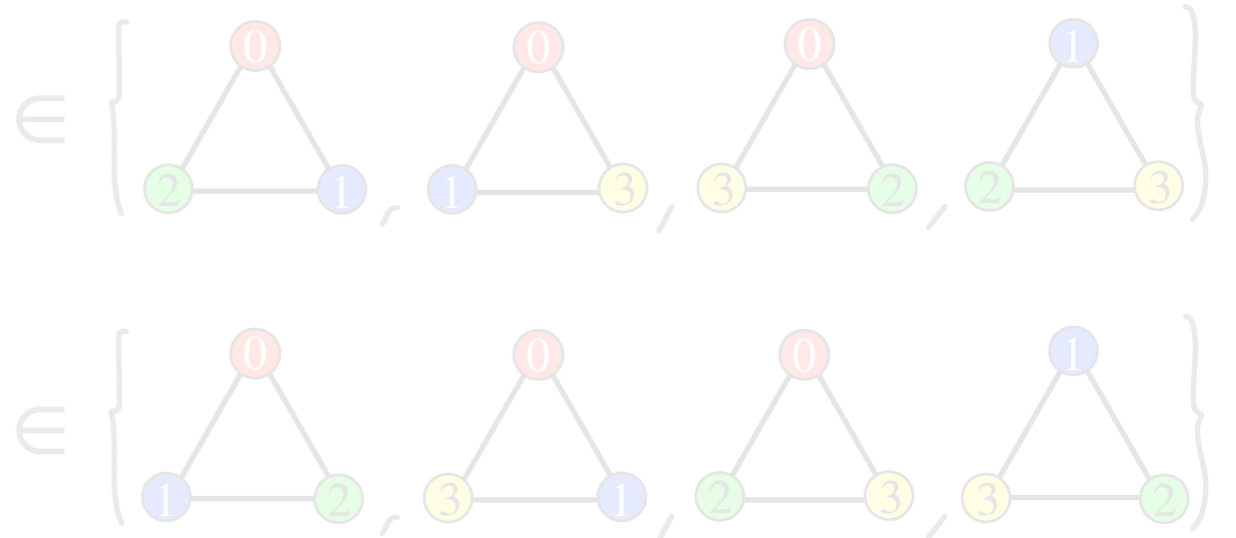
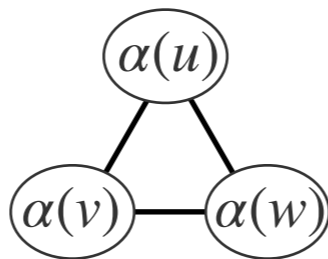
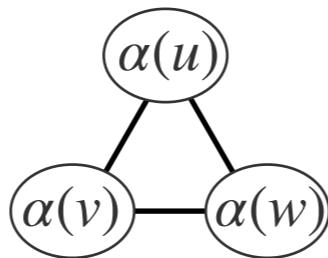
Ψ



\mapsto

Ψ

$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ if} \\ - \text{ if} \end{array} \right.$



準備

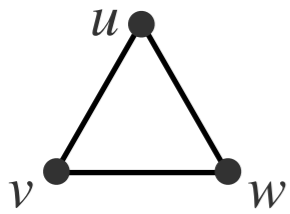
球面の3彩色可能三角形分割

$\alpha : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\} : G$ の4彩色

G の面の集合

$\varepsilon_\alpha : F(G) \rightarrow \{+, -\}$

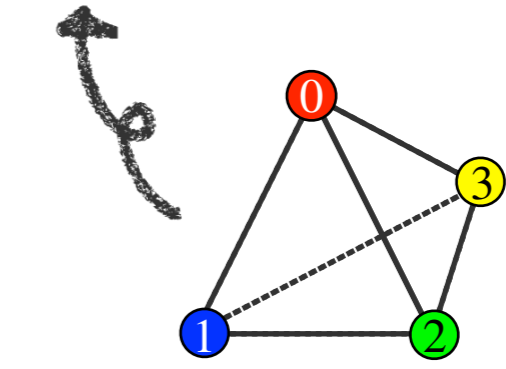
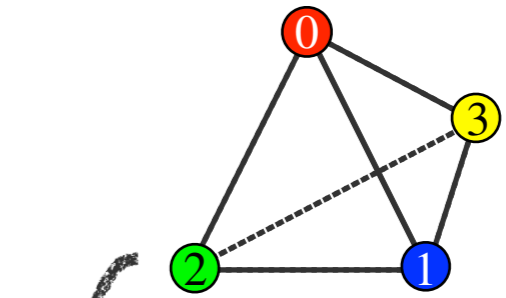
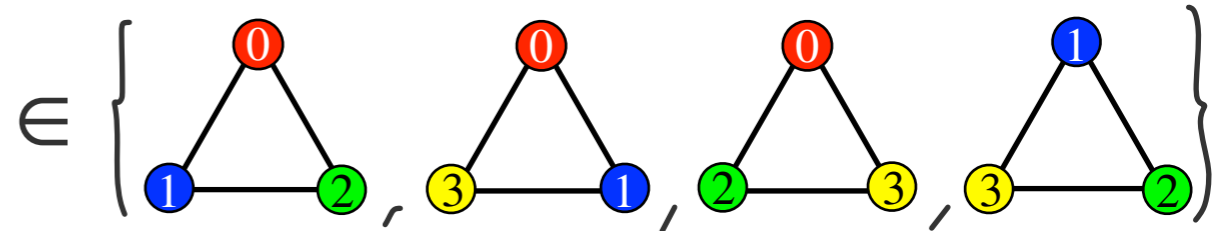
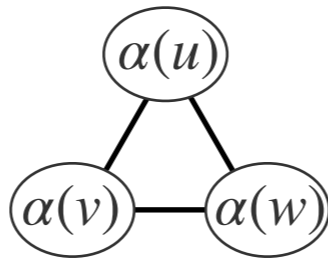
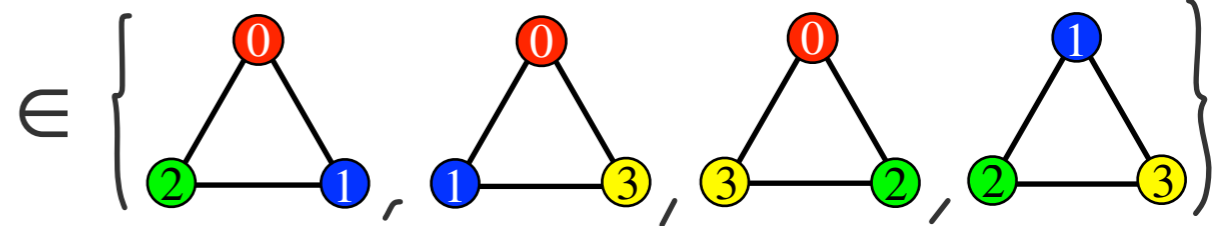
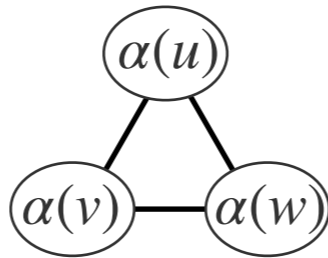
Ψ



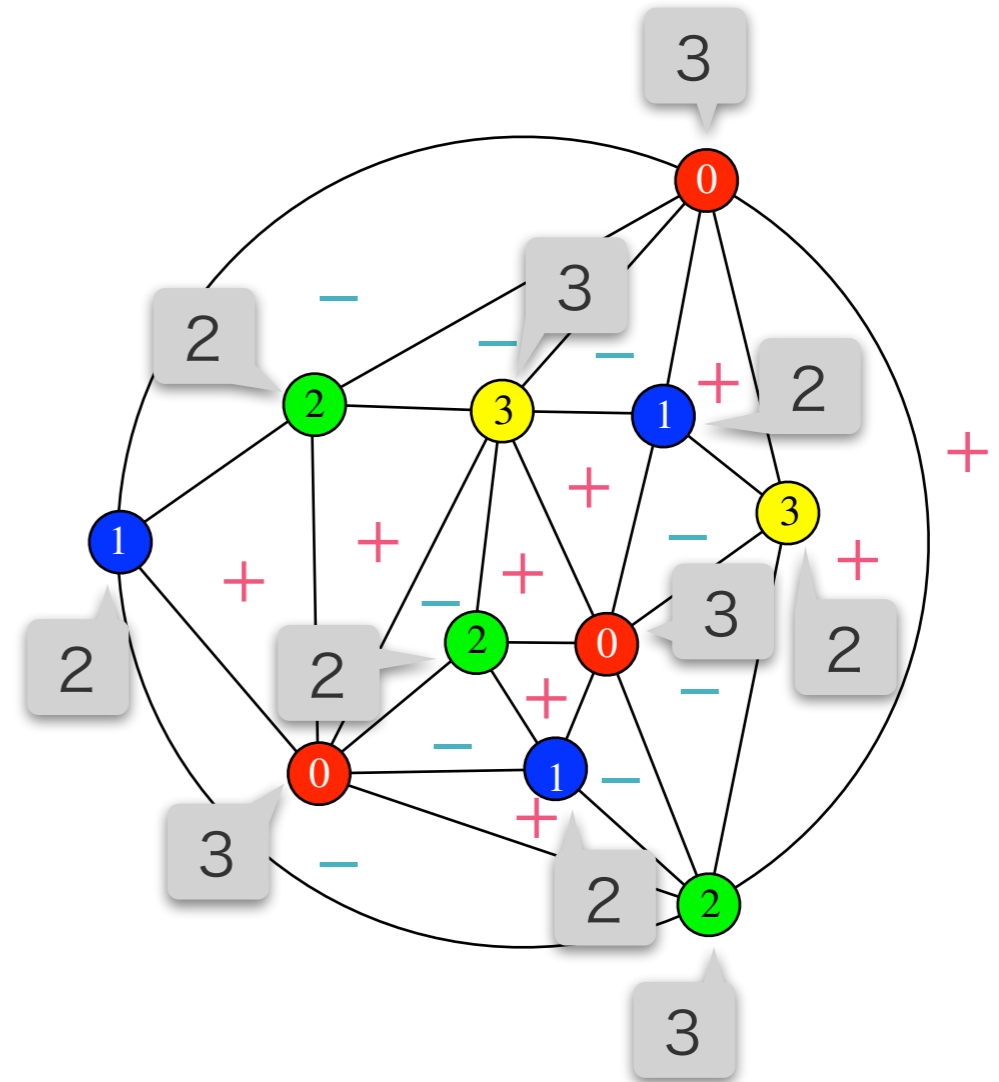
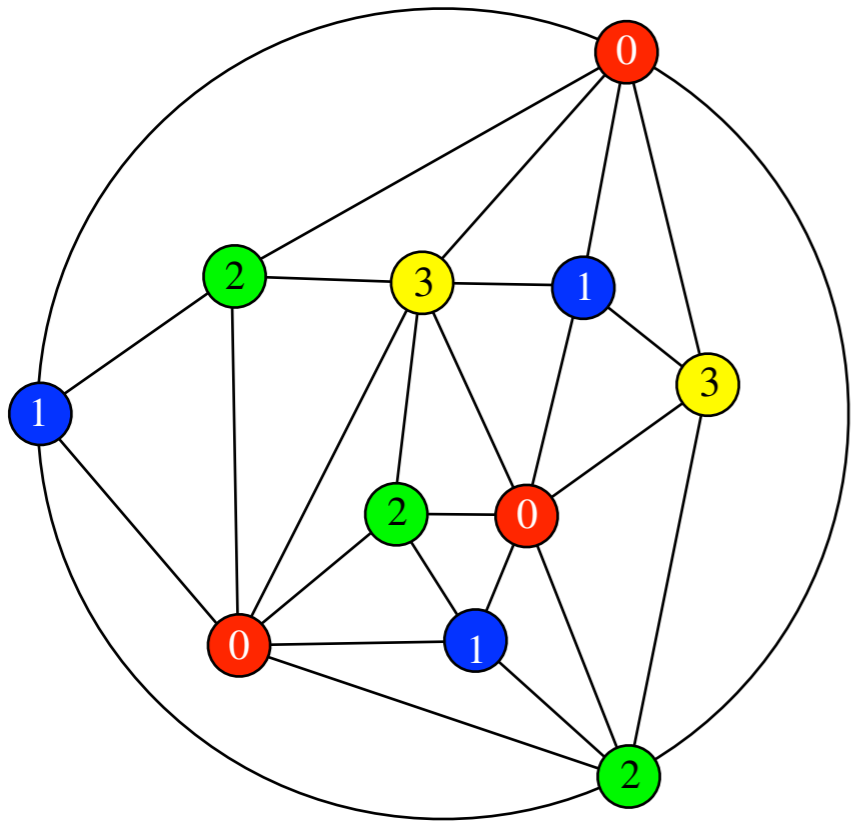
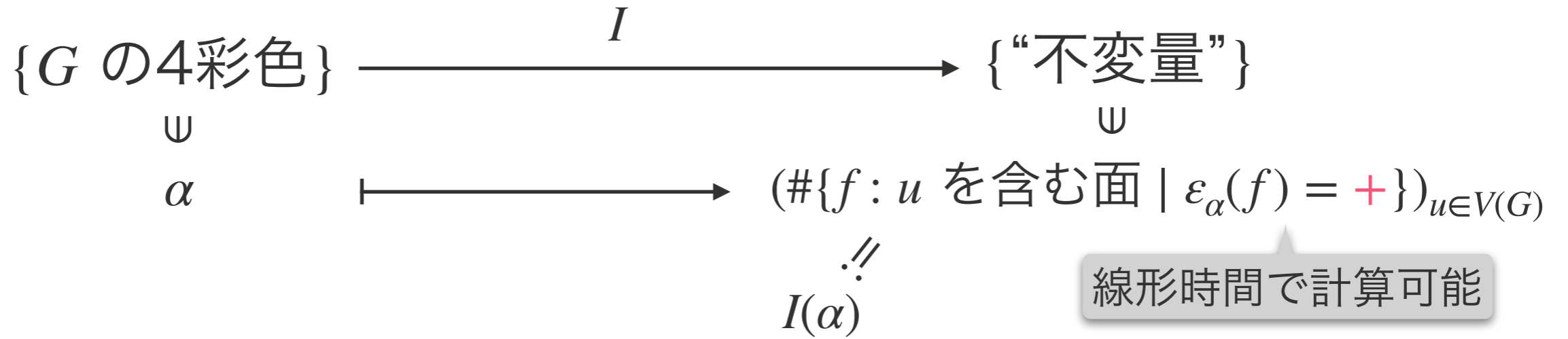
\mapsto

Ψ

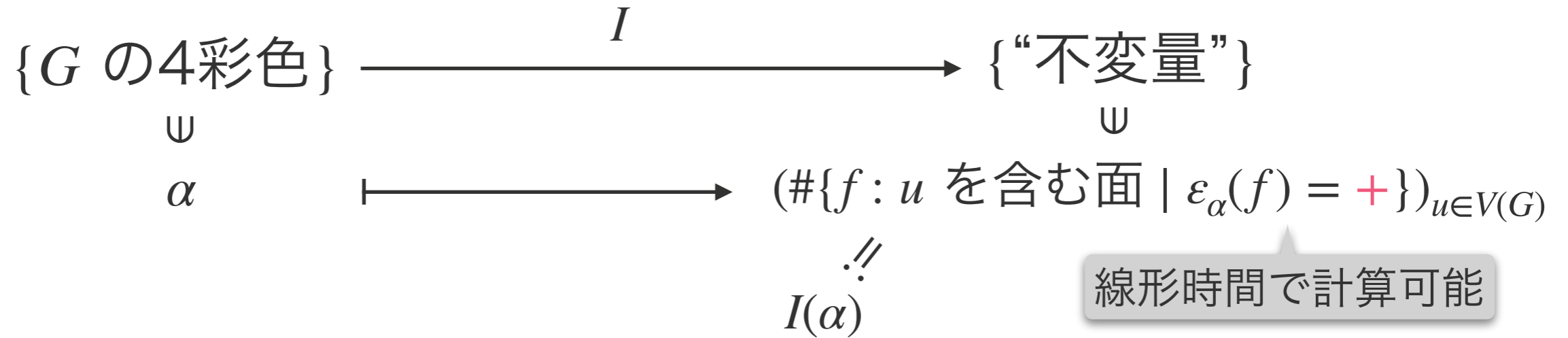
$\left\{ \begin{array}{l} + \text{ if} \\ - \text{ if} \end{array} \right.$



本研究における不変量

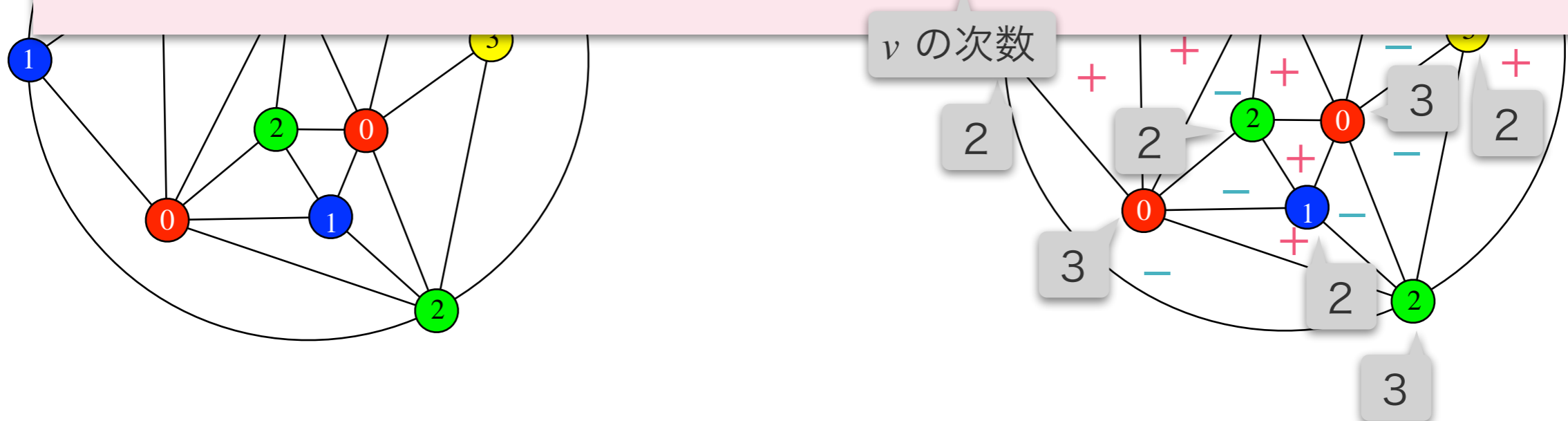


本研究における不変量



定理 (本研究)

- α, β が $\mathcal{R}_4(G)$ において同じ連結成分に属する $\stackrel{(\Leftrightarrow)}{\implies} I(\alpha) = I(\beta)$
- $\alpha \in 3\text{彩色連結成分} \iff I(\alpha) = \left(\frac{d(v)}{2}\right)_{v \in V(G)}$



本研究における不変量

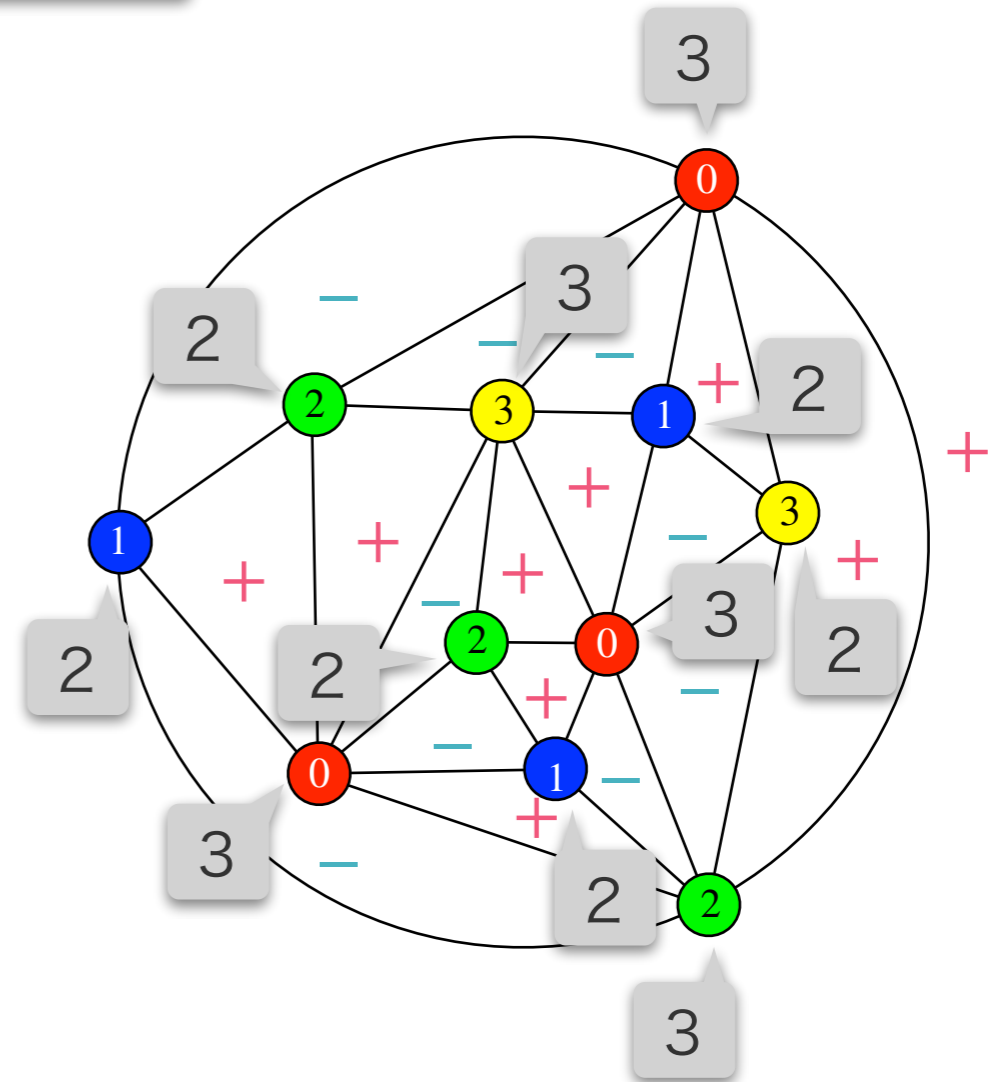
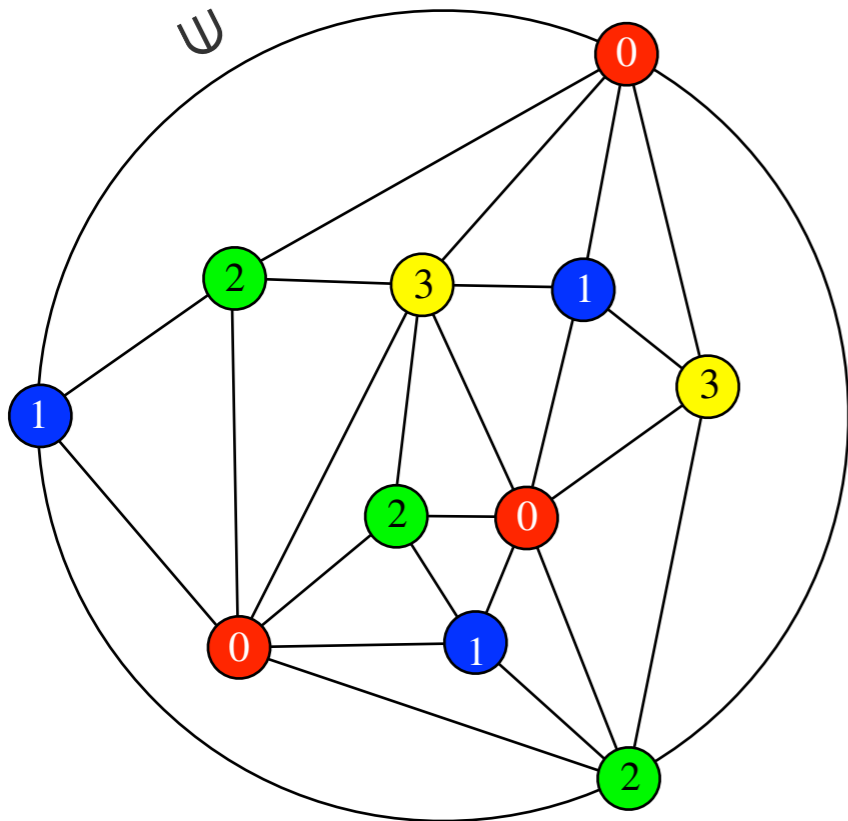
定理 (本研究)

• α, β が $\mathcal{R}_4(G)$ において同じ連結成分に属する $\stackrel{(\Leftrightarrow)}{\implies} I(\alpha) = I(\beta)$

• $\alpha \in 3$ 彩色連結成分 $\iff I(\alpha) = \left(\frac{d(v)}{2} \right)_{v \in V(G)}$ (G)

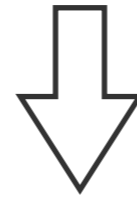
v の次数

3彩色連結成分



不変量の恩恵

遷移列を具体的に構成しなくても、遷移可能であることを示せる



不変量によって
遷移可能性判定にかかる時間

<

遷移列構成によって
遷移可能性判定にかかる時間
となることもある

定理 (本研究)

- α, β が $\mathcal{R}_4(G)$ において同じ連結成分に属する $\stackrel{(\Leftrightarrow)}{\implies} I(\alpha) = I(\beta)$
- $\alpha \in 3$ 彩色連結成分 $\iff I(\alpha) = (d(v)/2)_{v \in V(G)}$

不変量を用いて $O(\#V(G))$ 時間で判定可能 vs. 遷移列長は $\Omega(\#V(G)^2)$ になる可能性あり

まとめ

球面の3彩色可能三角形分割 G の 4彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_4(G)$ の
連結性を (ある程度) とらえる**不変量**の提案

省略した成果

- ・ 高次元版への拡張

$(k-2)$ 次元球面の $(k-1)$ 彩色可能単体分割 G の k 彩色遷移グラフ $\mathcal{R}_k(G)$

- ・ $\mathcal{R}_4(G)$ が連結となるような
球面の3彩色可能三角形分割 G の特徴づけ

紹介した不変量を利用して得られた成果

- ・ 色数を変更したときの計算量

C-2. 数学基盤：組合せ遷移の研究に資する数理手法

C-2.3. 組合せ遷移とトポロジー

野崎 雄太

(広島大学)

組合せ遷移とトポロジー

野崎雄太

広島大学

T. Ito, Y. Iwamasa, N. Kakimura, Y. Kobayashi,
S. Maezawa, Y. Nozaki, Y. Okamoto, K. Ozeki,
Rerouting Planar Curves and Disjoint Paths,
arXiv:2206.13019

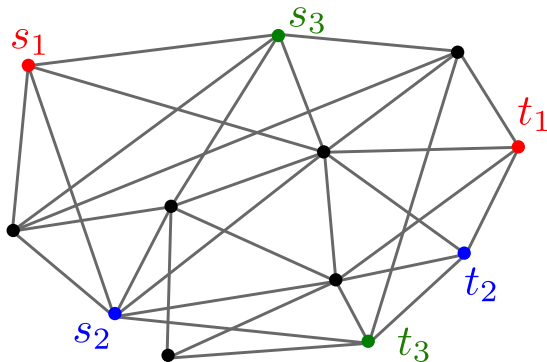
2023年2月21日

学術変革領域研究 (B) 「組合せ遷移」 最終報告会

点素パス問題

入力：グラフ $G = (V, E)$ と頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$.

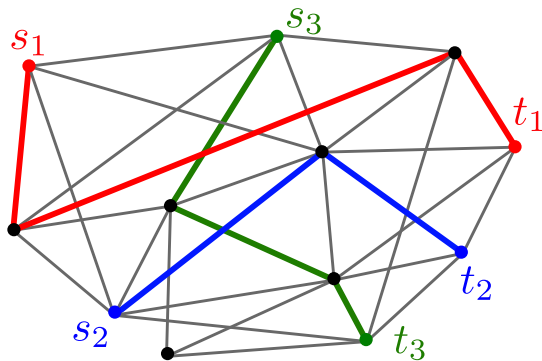
問題： s_i と t_i を結ぶパス P_i で互いに交わらないものを見つけよ.



点素パス問題

入力：グラフ $G = (V, E)$ と頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$.

問題： s_i と t_i を結ぶパス P_i で互いに交わらないものを見つけよ.



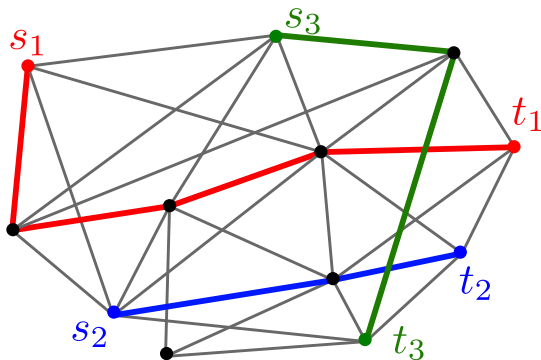
定理 (Robertson-Seymour 1995)

k が定数なら多項式時間で解ける.

点素パス問題

入力：グラフ $G = (V, E)$ と頂点 $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$.

問題： s_i と t_i を結ぶパス P_i で互いに交わらないものを見つけよ.

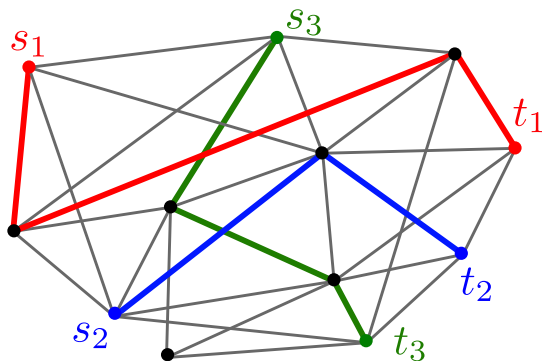


定理 (Robertson-Seymour 1995)

k が定数なら多項式時間で解ける.

点素パスの遷移

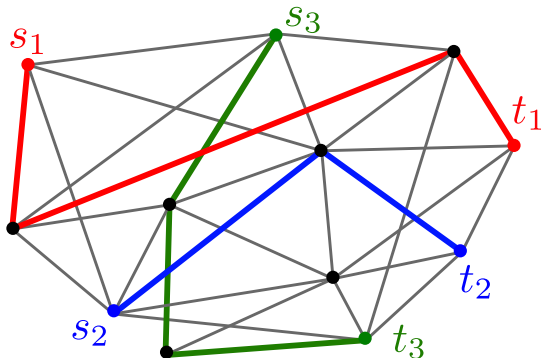
入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

点素パスの遷移

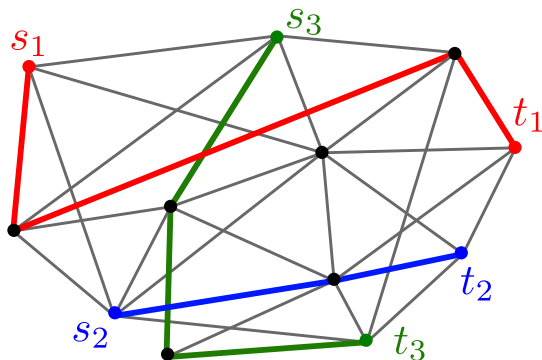
入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

点素パスの遷移

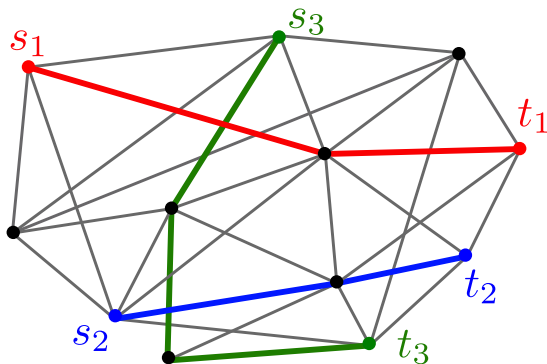
入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

点素パスの遷移

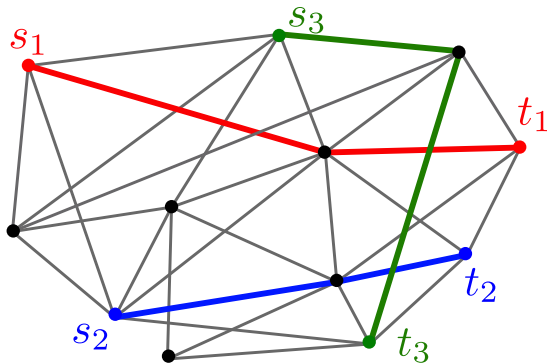
入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

点素パスの遷移

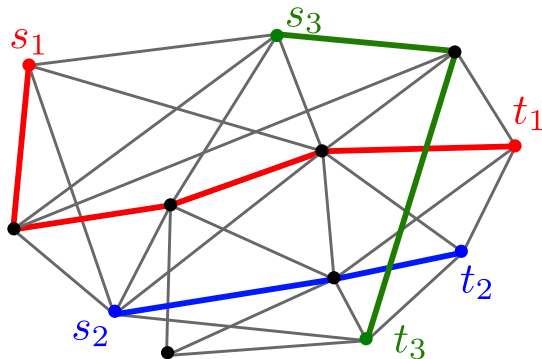
入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

点素パスの遷移

入力：グラフ $G = (V, E)$ と点素なパス $(P_1, \dots, P_k), (Q_1, \dots, Q_k)$.
問題：パスを1本ずつ変えて, (P_1, \dots, P_k) から (Q_1, \dots, Q_k) へ
遷移可能か？



緑 → 青 → 赤 → 緑 → 赤

定理 1 (点素パス遷移)

- 入力が一般のグラフの場合, $k = 2$ でも PSPACE 完全.
- 平面グラフの場合, k が入力の一部なら PSPACE 完全.
- 平面グラフかつ端点が“綺麗に”並んでいる場合, 多項式時間.

証明のアイデア：位相幾何的/代数的な条件

定理 2 (内点素 $s-t$ パス遷移)

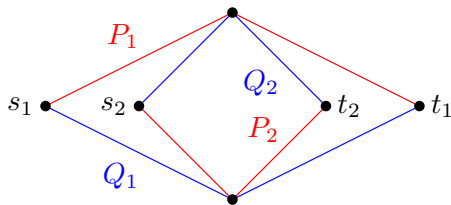
- 入力が一般のグラフの場合, $k = 2$ でも PSPACE 完全.
- 平面グラフの場合, 多項式時間.

証明のアイデア：カットサイズを用いた条件

平面グラフと曲線の遷移

グラフ上で遷移可能 \Rightarrow 平面曲線として遷移可能 \Leftrightarrow 代数的条件

なお, \Rightarrow の逆は成り立たない:

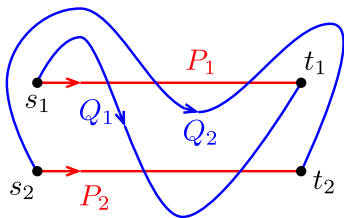


文字 x_1, x_2, \dots, x_k (および $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}$) からなる語に積を定めことで得られる群を階数 k の自由群と呼び, F_k と書く.

例: $x_2 x_1^2 x_3^{-1} x_3 x_1^{-2} x_2^2 = x_2 x_1^2 x_1^{-2} x_2^2 = x_2 x_2^2 = x_2^3 \in \langle x_2 \rangle \subset F_3.$

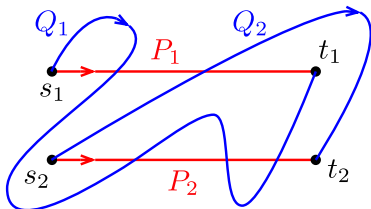
局所交叉数による語の構成

各 Q_j に沿って交点を追っていき、語 $w_j \in F_k$ を構成する：



$$w_1 = x_1^{-1} x_2^{-1} x_2 = x_1^{-1}$$

$$w_2 = x_1^{-1} x_1 = 1$$



$$w_1 = x_1^{-1} x_2 x_2^{-1} x_2 = x_1^{-1} x_2$$

$$w_2 = x_1$$



定理 3 (位相幾何的/代数的な条件)

平面曲線として遷移可能 $\Leftrightarrow w_j \in \langle x_j \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

w_j に現れる x_i の指数を足し合わせたものは、 P_i と Q_j の代数的交叉数と呼ばれ ($i \neq j$)、トポロジーにおいて基本的な道具である。

まとめ

さらに被覆空間の考え方をを用いることで次を得る.

定理 1 (点素パス遷移)

平面グラフかつ端点が“綺麗に”並んでいる場合, 多項式時間.

本研究におけるトポロジーの役割

- 曲線由来の困難とグラフ由来の困難を分離し, 前者を解決した.
 - 局所交叉数/代数的交叉数などの概念を提供し, 後者に取り組む指針を与えた.
-
- 平面グラフかつ k を定数とした場合の考察.
 - 平面以外の曲面上の曲線の遷移問題 (部分的に解決済み).
 - 遷移長の評価.

C-3. 数学基盤の アルゴリズム的ゲーム理論への展開

神山 直之

(九州大学)

このパートの主題

アルゴリズム的ゲーム理論における組合せ遷移的問題

遷移 = 割当問題におけるアイテムの交換

Takehiro Ito, Yuni Iwamasa, Naonori Kakimura, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi, Yuta Nozaki, Yoshio Okamoto, and Kenta Ozeki.

Reforming an Envy-Free Matching.

36th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 5084-5091, 2022.

問題設定

入力

- 参加者の集合 N
- 商品の集合 M
- 各 $x \in N$ が受け入れる商品の集合 $M_x \subseteq M$
- 各 $x \in N$ の M_x に対する選好 \succ_x (同順位を含まない)

	1 位	2 位	3 位	4 位
x	a	b	c	d
y	c	a	e	

無羨望割当

- $\mu: N \rightarrow M$ が**割当** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の異なる $x, y \in N$ に対して $\mu(x) \neq \mu(y)$

- マッチング $\mu: N \rightarrow M$ が**無羨望** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

任意の異なる $x, y \in N$ に対して $\mu(y) \not\prec_x \mu(x)$

	1 位	2 位	3 位	4 位
x	a	b	c	d
y	c	a	e	

無羨望

	1 位	2 位	3 位	4 位
x	a	b	c	d
y	c	a	e	

無羨望ではない

無羨望割当の改善

- 無羨望割当は存在しない問題例がある
 - 存在性は多項式時間で判定可能 (Gan et al. 2019)
- 本論文では初期割当 μ が与えられると仮定
- 以下の規則に則って可能な限り現在の割当 μ を改善する
 - $x \in N$ を選び $\mu(x)$ を現在誰にも割り当てられていない商品の中で x にとって $\mu(x)$ より好ましいものと交換する
 - 新たな割当も無羨望である
- 得られた割当を**改善主義的割当**とよぶ (概念の提案)

交換列の例 1

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
<i>x</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h</i>
<i>y</i>	<i>b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>z</i>	<i>h</i>	<i>r</i>	<i>i</i>		

交換列の例 2

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
x	a	b	c	d	h
y	b	r	a	d	g
z	h	r	i		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
x	a	b	c	d	h
y	b	r	a	d	g
z	h	r	i		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
x	a	b	c	d	h
y	b	r	a	d	g
z	h	r	i		

	1 位	2 位	3 位	4 位	5 位
x	a	b	c	d	h
y	b	r	a	d	g
z	h	r	i		

- 参加者を選ぶの順番が異なっても同じ改善主義的無羨望割当
- 改善主義的無羨望割当までの交換回数は異なる

得られた成果

成果 1

改善主義的無羨望割当は初期割当に対して唯一に定まる

では最小の交換回数を求める問題は？

成果 2

最小の交換回数を求める問題は以下の状況でも NP 完全

- 各参加者が高々 4 つの商品を受け入れる **かつ**
- 各商品が高々 3 名の参加者に受け入れられる

成果 3

以下の状況では最小の交換回数は多項式時間で求まる

- 各参加者が高々3つの商品を受け入れる **または**
- 各商品が高々2名の参加者に受け入れられる

最小の交換回数の近似可能性は？

成果 4

$P \neq NP$ ならば多項式時間 $c \ln |N|$ 近似不可能 (c はある定数)

得られた成果

固定パラメータ容易性は？

成果 5

長さが高々 $|N| + k$ の交換列が存在するかを判定する問題は k をパラメータとすると $W[1]$ 困難

成果 6

K を「途中の商品」の集合とし $|K|$ をパラメータとすると固定パラメータ容易